TD n° 4 : Rappels sur l'intégration

Proposition 1 – Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle (cf prop. 3). On a
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Proposition 2 – Somme de Riemann

Soit f une fonction continue sur le segment $[0\,;1]$. On a alors
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Plus généralement, si f est une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$, on a
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque. La propriété est également valable si la somme porte sur des indices allant de 0 à $n-1$.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{2n^2}$.

Exercice 2. ★ Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Proposition 3 – Primitive

Soient I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction continue sur I. La fonction
$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
En particulier, toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

Exercice 3. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner F'.

Proposition 4 – Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a\,;b]$.

1. *Relation de Chasles* : pour $c \in [a\,;b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. *Linéarité* : pour α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
3. *Positivité* : si f est positive, *i.e.* $\forall x \in [a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
4. *Ordre / Croissance* : si $\forall x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4. On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Exprimer G en fonction de F définie dans l'exercice précédent.
2. En déduire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner G'.

Exercice 5.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant x^n\,\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}\,x^n$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6. Calculer les intégrales.

a) $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{t^2-5t+6}\,\mathrm{d}t$ b) $B = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\mathrm{i}}$ c) $C = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

Proposition 5 – Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a\,;b]$. On a

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7. Déterminer

a) la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$ b) la primitive de ln s'annulant en 1.

Proposition 6 – Changement de variable

Soient φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f une fonction continue sur $\varphi(I)$.
Pour tous réels a et b dans I, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 8. À l'aide du changement de variable donné, calculer les intégrales.

a) $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \sqrt{x+1}$ b) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$ en posant $x = \tan t$