TD n$^{\text{o}}$ 4 : Rappels sur l'intégration

Proposition 1. Somme de Riemann
Soit f une fonction continue sur le segment $[0\,;1]$. On a alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Plus généralement, si f est une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$, on a

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque. La propriété est également valable si la somme porte sur des indices allant de 0 à $n-1$.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{2n^2}$.

Exercice 2. ★ Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Proposition 2. *Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a\,;b]$.*

1. Relation de Chasles *: pour $c\in[a\,;b]$,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Linéarité *: pour $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$,* $\displaystyle\int_a^b(\alpha f+\beta g)(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Positivité *: si f est positive,* i.e. $\forall x\in[a\,;b],\ f(x)\geqslant 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.
4. Ordre / Croissance *: si $\forall x\in[a\,;b],\ f(x)\leqslant g(x)$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. À l'aide d'un encadrement, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4. Calculer les intégrales.

a) $\displaystyle A=\int_0^1\frac{t-1}{t^2-5t+6}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle B=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+\mathrm{i}}$ c) $\displaystyle C=\int_0^{\pi/2}\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

Proposition 3. Intégration par parties
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a\,;b]$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t=\Big[u(t)v(t)\Big]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5. Déterminer

a) la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$ b) la primitive de ln s'annulant en 1.

Proposition 4. Changement de variable
Soient φ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et f une fonction continue sur $\varphi(I)$. Alors pour tous réels a et b dans I, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6. À l'aide du changement de variable donné, calculer les intégrales.

a) $\displaystyle I=\int_0^3\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ en posant $t=\sqrt{x+1}$ b) $\displaystyle J=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$ en posant $x=\tan t$